* [He](http://davidson.weizmann.ac.il/online/mathcircle/articles/%D7%A1%D7%93%D7%A8%D7%95%D7%AA-%D7%95%D7%A8%D7%90%D7%A9%D7%95%D7%A0%D7%99%D7%99%D7%9D)
* [En](http://davidson.weizmann.ac.il/en)
* [ראשי](http://davidson.weizmann.ac.il/)
* [תוכניות](http://davidson.weizmann.ac.il/programs)
* [גן המדע](http://davidson.weizmann.ac.il/science-garden)
* [אודות](http://davidson.weizmann.ac.il/%D7%90%D7%95%D7%93%D7%95%D7%AA)
* [המוח](http://davidson.weizmann.ac.il/%D7%94%D7%9E%D7%95%D7%97)

**סדרות וראשוניים**

* [ארי שביב](http://davidson.weizmann.ac.il/authors/%D7%90%D7%A8%D7%99-%D7%A9%D7%91%D7%99%D7%91)

27 באפריל, 2015 זמן קריאה משוער 15 דקות 15 ד׳

[מאגר המדע](http://davidson.weizmann.ac.il/column/maagarmada)

**שתפו**

* 2
* 1

בואו ניזכר [בחידה משבוע שעבר](http://davidson.weizmann.ac.il/online/mathcircle/articles/%D7%97%D7%99%D7%93%D7%94-%D7%A9%D7%91%D7%95%D7%A2%D7%99%D7%AA-%D7%9E%D7%A1%D7%A4%D7%A8-%D7%90%D7%99%D7%A0%D7%A1%D7%95%D7%A3-%D7%A8%D7%90%D7%A9%D7%95%D7%A0%D7%99%D7%99%D7%9D" \t "_blank) ונפתור אותה. באמצעות הכלל הבא בנינו סדרה: 41 הוא המספר הראשון שלנו וכל מספר מתקבל מהמספר שלפניו על ידי הוספת המספר הזוגי הבא בתור שטרם הוספנו. כך התקבלה הסדרה 97,83,71,61,53,47,43,41... הסדרה הזאת אינה סדרה חשבונית (סדרה שההפרש בין כל שני איברים סמוכים בה הוא קבוע) וגם אינה סדרה הנדסית (שהיחס בין כל שני איברים סמוכים בה הוא קבוע). אבל יש לה מבנה מעניין אחר.

אפשר לכתוב אותה כך:

41  
41+2  
41+(2+4)  
41+(2+4+6)  
41+(2+4+6+8)

וכך הלאה. אם נאמר שאיבר האפס בה הוא 41, האיבר הראשון הוא 43, האיבר השני הוא 47 וכך הלאה, אז האיבר ה-n הוא

41+(2+4+6+8+…+2n)

כלומר האיבר ה-n הוא 41 ועוד סכום של סדרה חשבונית בת n איברים שהאיבר הראשון בה הוא 2 וההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא 2. הסכום של סדרה חשבונית כזאת הוא *n*2+*n*

, ולכן הנוסחה לאיבר ה-n היא 41+*n*2+*n*

.

בקשר לחידה, נשים לב שאם נציב n=41 נקבל את המספר

41+41\*41+41=41\*(1+41+1)=41\*43=1,763

וזה מספר שמתחלק ב-41, ובוודאי אינו ראשוני. לכן התשובה היא שלא כל המספרים שיתקבלו אם נמשיך בתהליך הזה יהיו ראשוניים. חלקם, למשל 1,763, אינם ראשוניים. אבל האם יצוצו לנו אינסוף מספרים ראשוניים בתהליך? אולי 1,763 הוא המספר היחיד שאינו ראשוני?

אם נציב מספרים בנוסחה נראה שהמספרים הבאים בתור הם 1,847 (שהוא ראשוני), 1,933 (שהוא ראשוני), 2,021 (שאינו ראשוני – הוא מתחלק ב-43) ואז 2,111 (שהוא שוב ראשוני). גם המספר הקודם אינו ראשוני: אם נציב n=40 נקבל:

41+40\*40+40=41+40\*(40+1)=41+40\*41=41\*41=1,681

שאינו ראשוני. אפשר לבדוק ולראות שעבור כל n טבעי קטן מ-40, המספרים שנקבל יהיו ראשוניים.

**ראשוניים בסדרות מספרים**  
התשובה לשאלה אם יצוצו לנו אינסוף ראשוניים בתהליך הזה אינה ידועה.

מתמטיקאים אוהבים לקחת סדרות אינסופיות של מספרים שלמים ולשאול אם הן מכילות אינסוף מספרים ראשוניים. אנחנו שאלנו את זה לגבי הסדרה *n*2+*n*+41

. כעת הבה נשאל זאת על סדרות חשבוניות של מספרים שלמים.

סדרה חשבונית היא סדרת מספרים מהצורה a+n\*k, כאשר a ו-k הם מספרים קבועים, ו-n מתחיל מאפס ומקבל את כל הערכים השלמים החיוביים. a הוא איבר האפס של הסדרה ו-k הוא ההפרש שלה. לדוגמה, אם ניקח a=3 ו-k=5 נקבל את הסדרה 3, 8, 13, 18, 23...

כאן נעסוק בסדרות חשבוניות שכל האיברים שלהן הם מספרים שלמים.

**המקרה הקל**  
מה קורה כש-a ו-k הם שני מספרים שלמים שקיים שיש מספר שלם m>1 ששניהם מתחלקים בו ללא שארית? במקרה הזה אף מספר בסדרה לא יהיה ראשוני: גם a וגם k מתחלקים ב-m, כלומר יש שני מספרים שלמים b ו-c, כך ש-a=b\*m ו-k=c\*m.

עכשיו אפשר לחשב ולראות ש: a+n\*k=b\*m+n\*c\*m=m\*(b+n\*c), וזה מספר לא ראשוני (הוא מתחלק ב-m). לדוגמה, בסדרה 6+n\*15 אין מספרים ראשוניים בכלל, כי כל מספר בה מתחלק ב-3 (כי גם 6 וגם 15 מתחלקים ב-3).

**משפט דיריכלה**  
שני מספרים שלמים a ו-k נקראים זרים אם לא קיים מספר שלם m>1 ששניהם מתלחקים בו ללא שארית. אז מה קורה בסדרה מהצורה a+n\*k שבה a ו-k זרים? משפט דיריכלה (על שם המתמטיקאי הגרמני בן המאה ה-19 [יוהאן פטר גוסטב לז'ן דיריכלה](http://he.wikipedia.org/wiki/%D7%99%D7%95%D7%94%D7%90%D7%9F_%D7%A4%D7%98%D7%A8_%D7%92%D7%95%D7%A1%D7%98%D7%91_%D7%9C%D7%96%27%D7%9F_%D7%93%D7%99%D7%A8%D7%99%D7%9B%D7%9C%D7%94)) מבטיח לנו שיש בה אינסוף מספרים ראשוניים. כדי להוכיח את המשפט יש להשתמש בכלים מתמטיים הרבה יותר מסובכים ממספרים שלמים, למשל אנליזה.

**בניית החידה**  
לפני סיום נסביר איך בנינו את החידה.

ניקח שני מספרים עוקבים שגדולים מ-2. אחד מהם יהיה זוגי בהכרח, כך שאין סיכוי ששניהם יהיו ראשוניים. שני מספרים שהמרחק ביניהם הוא 2 בדיוק יכולים להיות ראשוניים, למשל 3 ו-5 או 11 ו-13. [השערת התאומים](http://he.wikipedia.org/wiki/%D7%94%D7%A9%D7%A2%D7%A8%D7%AA_%D7%94%D7%9E%D7%A1%D7%A4%D7%A8%D7%99%D7%9D_%D7%94%D7%A8%D7%90%D7%A9%D7%95%D7%A0%D7%99%D7%99%D7%9D_%D7%94%D7%AA%D7%90%D7%95%D7%9E%D7%99%D7%9D" \t "_blank) קובעת שיש אינסוף זוגות של מספרים ראשוניים שהמרחק ביניהם הוא 2.

ומה לגבי שלשות של מספרים? נבדוק מהם המרחקים האפשריים הקטנים ביותר בין המספרים בשלשה של מספרים ראשוניים. ניקח מספר ראשוני גדול מ-3 ונסמן אותו ב-p. מאחר שהוא ראשוני הוא לא מתחלק ב-3 ללא שארית, ולכן הוא מהצורה 3k+1 או מהצורה 3k+2.

ננסה לבחור את המספר השני בשלשה. ראינו כבר שהמספר p+1 אינו ראשוני, כי הוא מתחלק ב-2. מה לגבי p+2? במקרה הראשון pהוא מהצורה 3k+1. אז p+2=3k+1+2=3(k+1). לכן במקרה הזה לא ייתכן ש-p+2 יהיה ראשוני. קיבלנו שכדי שגם p וגם p+2 יהיו ראשוניים, p מוכרח להיות מהצורה 3k+2.

עכשיו נניח שגם p וגם p+2 אכן ראשוניים. ננסה לבחור את המספר האחרון בשלשה. ברור ש-p+3=(p+2)+1 זוגי, לכן אינו ראשוני. מה לגבי p+4? כלומר מה לגבי (p+2)+2? ובכן, ראינו ש-p הוא מהצורה 3k+2, ולכן p+2=3k+4=3(k+1)+1, שזה בעצם מספר מהצורה 3k'+1 (לצורך העניין k'=k+1).

לכן, כפי שכבר ראינו, אין סיכוי שהמספר (p+2)+2=p+4 יהיה גם הוא ראשוני. אין גם סיכוי שהמספר  (p+2)+3 יהיה ראשוני, מפני שהוא זוגי. לכן נצטרך לקחת את (p+2)+4=p+(2+4).

אם נמשיך במשחק הזה נקבל את המסקנה הבאה: אם מתחילים ממספר ראשוני ורוצים להתרחק ממנו בצעדים קטנים ככל האפשר כך שיהיה סיכוי שכל המספרים שיתקבלו יהיו ראשוניים, האפשרות היחידה היא להוסיף 2, לאחר מכן להוסיף 2+4, לאחר מכן להוסיף 2+4+6, לאחר מכן להוסיף 2+4+6+8, וכך הלאה.

איך בחרנו את המספר 41 שממנו התחלנו? זה כבר יותר מסובך. הפולינום *x*2+*x*+41

ידוע בשם "הטרינום של אוילר", על שם המתמטיקאי בן המאה ה-18 [לאונרד אוילר](http://he.wikipedia.org/wiki/%D7%9C%D7%90%D7%95%D7%A0%D7%A8%D7%93_%D7%90%D7%95%D7%99%D7%9C%D7%A8), מגדולי המתמטיקאים בכל הזמנים. נתעניין בשאלה כללית יותר: ניקח מספר ראשוני p ונתבונן בכל המספרים מהצורה *n*2+*n*+*p*, כאשר n מספר שלם חיובי. ברור שעבור n=p-1 נקבל מספר לא ראשוני, כי (*p*−1)2+(*p*−1)+*p*=*p*2

. מה בנוגע ל-n קטן יותר? ראינו שעבור p=41 כל המספרים שיתקבלו אם נציב n=0,1,2,…,39 (מאפס עד p-2) יהיו כולם ראשוניים.

**מספרי המזל של אוילר**  
מספר ראשוני p שעבורו מתקיים שכל המספרים מהצורה *n*2+*n*+*p*

עם n=0,1,2,…,p-2 הם ראשוניים נקרא "מספר מזל של אוילר". למרבה הפלא ישנם רק שישה כאלה, והם 2, 3, 5, 11, 17, ו-41. על מנת להוכיח את זה יש לעשות שימוש בכלים מתמטיים מודרניים ומסובכים למדי. השאלה עניינה מתמטיקאים רבים במשך עשרות שנים, ולסיפור הוכחתה יש היסטוריה מעניינת. רק בשלהי שנות ה-60 של המאה ה-20, כמאתיים שנה אחרי שאוילר החל לעסוק בה, הוכחה תשובתה באופן סופי.

הערה לקורא החרוץ: בספרות מכונה לעתים הפולינום *x*2−*x*+41

בשם "הטרינום של אוילר", ואז מספר מזל של אוילר מוגדר כמספר ראשוני p שעבורו כל המספרים מהצורה *n*2−*n*+*p*

עם n=0,1,2,…,p-1 הם ראשוניים. שתי ההגדרות שקולות, כלומר נותנות את אותם מספרי מזל בדיוק. אפשר לראות את זה באמצעות החלפת משתנים פשוטה: בפולינום שלנו הציבו n-1 במקום n, ולחילופין בפולינום החדש הציבו n+1 במקום n.

**אז מה למדנו?**  
פתרנו את החידה די בקלות באמצעות חישוב סכום של סדרה חשבונית פשוטה. הדבר המדהים הוא שאחריה צצו שאלות נוספות באופן קל וטבעי למדי, אבל התשובות להן קשות מאוד והן מצריכות כלים מתמטיים מתקדמים מאוד. נדרשו עשרות ומאות שנים כדי לפתור את חלקן, וחלקן האחר עדיין לא פתור. תורת המספרים היא תחום במתמטיקה שקל בו מאוד לשאול שאלות וקשה מאוד לענות עליהן. בעיניי זהו אחד הקסמים הגדולים ביותר של המתמטיקה.

**ארי שביב**  
הפקולטה למתמטיקה ומדעי המחשב  
מכון ויצמן למדע

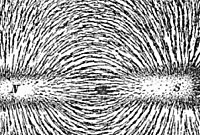
**הערה לגולשים**  
אם אתם חושבים שההסברים אינם ברורים מספיק או אם יש לכם שאלות הקשורות לנושא, אתם מוזמנים לכתוב על כך בתגובה לכתבה זו ואנו נתייחס להערותיכם. הצעות לשיפור וביקורת בונה יתקבלו תמיד בברכה.

**שתפו כתבה**

כתבות נוספות שעשויות לעניין אותך

[איפה קרני השמש בלילה ומדוע הירח מאיר? אור](http://davidson.weizmann.ac.il/online/askexpert/astrophysics/%D7%90%D7%99%D7%A4%D7%94-%D7%A7%D7%A8%D7%A0%D7%99-%D7%94%D7%A9%D7%9E%D7%A9-%D7%91%D7%9C%D7%99%D7%9C%D7%94-%D7%95%D7%9E%D7%93%D7%95%D7%A2-%D7%94%D7%99%D7%A8%D7%97-%D7%9E%D7%90%D7%99%D7%A8-%D7%90%D7%95%D7%A8" \t "_self)

[מדע בדקה: הטלסקופ הענקי של נאס"א וציפורים טרופיות](http://davidson.weizmann.ac.il/online/minutescience/%D7%9E%D7%93%D7%A2-%D7%91%D7%93%D7%A7%D7%94-%D7%94%D7%98%D7%9C%D7%A1%D7%A7%D7%95%D7%A4-%D7%94%D7%A2%D7%A0%D7%A7%D7%99-%D7%A9%D7%9C-%D7%A0%D7%90%D7%A1%D7%90-%D7%95%D7%A6%D7%99%D7%A4%D7%95%D7%A8%D7%99%D7%9D-%D7%98%D7%A8%D7%95%D7%A4%D7%99%D7%95%D7%AA" \t "_self)

[כיצד נוצרת מגנטיות ומהו מגנט? אלון](http://davidson.weizmann.ac.il/content/%D7%9B%D7%99%D7%A6%D7%93-%D7%A0%D7%95%D7%A6%D7%A8%D7%AA-%D7%9E%D7%92%D7%A0%D7%98%D7%99%D7%95%D7%AA-%D7%95%D7%9E%D7%94%D7%95-%D7%9E%D7%92%D7%A0%D7%98-%D7%90%D7%9C%D7%95%D7%9F" \t "_self)

[איפה תיפול תחנת החלל הסינית?](http://davidson.weizmann.ac.il/online/askexpert/%D7%90%D7%99%D7%A4%D7%94-%D7%AA%D7%99%D7%A4%D7%95%D7%9C-%D7%AA%D7%97%D7%A0%D7%AA-%D7%94%D7%97%D7%9C%D7%9C-%D7%94%D7%A1%D7%99%D7%A0%D7%99%D7%AA" \t "_self)

[מדוע מטוסים מגביהי טוס פולטים עשן לבן? שחר](http://davidson.weizmann.ac.il/online/askexpert/technology/%20%D7%9E%D7%93%D7%95%D7%A2%20%D7%9E%D7%98%D7%95%D7%A1%D7%99%D7%9D%20%D7%9E%D7%92%D7%91%D7%99%D7%94%D7%99%20%D7%98%D7%95%D7%A1%20%D7%A4%D7%95%D7%9C%D7%98%D7%99%D7%9D%20%D7%A2%D7%A9%D7%9F%20%D7%9C%D7%91%D7%9F%3F%20%D7%A9%D7%97%D7%A8" \t "_self)

[מדוע זכתה פרת משה רבנו לשם זה? דורין](http://davidson.weizmann.ac.il/online/askexpert/general_know/%D7%9E%D7%93%D7%95%D7%A2-%D7%96%D7%9B%D7%AA%D7%94-%D7%A4%D7%A8%D7%AA-%D7%9E%D7%A9%D7%94-%D7%A8%D7%91%D7%A0%D7%95-%D7%9C%D7%A9%D7%9D-%D7%96%D7%94-%D7%93%D7%95%D7%A8%D7%99%D7%9F" \t "_self)

[Recommended by](http://www.outbrain.com/what-is/default/he)

**תגובה אחת**

Top of Form









Bottom of Form

* **דן-1**

ו', 05/01/2015 - 11:56

**תגובות ושאלות לכתבה:"סדרות וראשוניים"**

1-הטרינוםx2−x+41 מיוחס לאנדריין לז'נדר (1752-1833).  
בסדרה חשבונית "קלסית" מתחילים מאיבר ראשון A1 ולא AO ולכן נראה שהטרינום של לזנדר מייצג בצורה טובה את הפתרון לבעיה בכתבה.

2-האם קיים בינום שמציבים בו את הסדרה:0,1,2,3,,,,ומקבלים ראשוניים?(לפחות 10 או יותר)

3-האם ניתן למצוא טרינום (לא אוילר) שמציבים בו את המספרים השלמים מ-0 עד- 45 ברצף,ומקבלים מספרים ראשוניים?

בברכה  
דן-1

* + [השב](http://davidson.weizmann.ac.il/comment/reply/5658/17159)

**תגובות פייסבוק**

[פותח ע"י](http://decor-d.com)

* [דף הבית](http://davidson.weizmann.ac.il/)
* [אודות](http://davidson.weizmann.ac.il/%D7%90%D7%95%D7%93%D7%95%D7%AA)
* [דרושים](http://davidson.weizmann.ac.il/%D7%93%D7%A8%D7%95%D7%A9%D7%99%D7%9D-%D7%9C%D7%93%D7%95%D7%99%D7%93%D7%A1%D7%95%D7%9F)
* [צור קשר](http://davidson.weizmann.ac.il/%D7%A6%D7%95%D7%A8-%D7%A7%D7%A9%D7%A8)
* [תמכו בנו](http://davidson.weizmann.ac.il/%D7%AA%D7%9E%D7%99%D7%9B%D7%94-%D7%91%D7%9E%D7%9B%D7%95%D7%9F-%D7%93%D7%95%D7%99%D7%93%D7%A1%D7%95%D7%9F)
* [תנאי שימוש](http://davidson.weizmann.ac.il/%D7%AA%D7%A0%D7%90%D7%99-%D7%A9%D7%99%D7%9E%D7%95%D7%A9)
* [הצהרת נגישות](http://davidson.weizmann.ac.il/%D7%94%D7%A6%D7%94%D7%A8%D7%AA-%D7%A0%D7%92%D7%99%D7%A9%D7%95%D7%AA)
* להרשמה לניוזלטר

Top of Form

דוא"ל \*

Bottom of Form